Tentamen Calculus I, 4 februari 2009, 9:00–12:00.

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Alle (negen) opgaven tellen even zwaar. Het gebruik van boek(en), aantekeningen of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen niet toegestaan.

(1) Laat zien, dat er voor elk geheel getal $n \geq 1$ getallen a_n, b_n bestaan zodat de n-de afgeleide van $e^x \sin x$ gelijk is aan $a_n e^x \sin x + b_n e^x \cos x$.

(2) Bepaal de absolute waarde van $(1+i)^{10} + (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^{30}$.

(3) Bewijs met behulp van de ϵ-δ definitie van 'limiet', dat $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2+1}{3x-1} = 1$.

(4) Bepaal $\lim_{x \to 0} \tan(x) \cdot \ln(x)$.

(5) Bepaal de afgeleide van $f(x) = \displaystyle\int_2^{e^x} \frac{(\ln t)^2}{t^3}\, dt$.

(6) Vind *alle* (locale) maxima en minima van de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, gegeven door $f(x) = \dfrac{x^3+10}{x^2+2}$.

(7) Bepaal een primitieve van $\tan^3 x$.

(8) Bereken $\displaystyle\int_{5\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{10}{2x^2 - 7x + 3}\, dx$.

(9) Bepaal een oplossing $y(x)$ van $y' = -y + 2e^{-x}$ die voldoet aan $y(0) = 2$.

Uitwerking (onofficiëel) van tentamen Calculus 1, 4 februari 2009

Ik heb bij het maken van deze uitwerking niet gecorrespondeerd met de docenten van Calculus 1, en maak dus ook geen garanties over de correctheid of volledigheid van mijn uitwerking. Maar dat snap je vast zelf ook :)

1. Hier is een volledige inductie nodig. Het leuke is dat we a en b niet hoeven te weten om te bewijzen dat ze bestaan.

   Eerst een beetje verkennen: als je $e^x \sin(x)$ afleidt krijg je $e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$. Als je $e^x \cos(x)$ afleidt krijg je $-e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$.

   Begin nu met de inductie. Basisstap: vul $n = 1$ in en bewijs. We zagen dat de eerste afgeleide gelijk is aan $e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$. Hieruit volgt dat a_1 en b_1 bestaan en beiden gelijk zijn aan 1.

   Inductiestap: Neem aan dat er a_n en b_n bestaan zodat de n-de afgeleide gelijk is aan $a_n e^x \sin(x) + b_n e^x \cos(x)$. De $n+1$-ste afgeleide is dan

   $$a_n e^x \sin(x) + a_n e^x \cos(x) - b_n e^x \sin(x) + b_n e^x \cos(x),$$

   hetgeen gelijk is aan $(a_n - b_n)e^x \sin(x) + (a_n + b_n)e^x \cos(x)$.

   Hieruit volgt dat $a_{n+1} = a_n - b_n$ en dat $b_{n+1} = a_n + b_n$, en aangezien a_n en b_n bestonden (inductie-aanname) hebben we nu waarden voor a_{n+1} en b_{n+1}, en bestaan die dus ook. Hiermee is het bewijs voltooid.

2. (Wellicht is er een Slim Trucje voor deze som. Ik zie hem even niet, dus doe het maar op de naïeve manier.)

   Om zulke hoge machten van complexe getallen uit te rekenen, kun je het best met de polaire vorm ervan werken, want dan werkt de stelling van De Moivre. We zien:

   $$1 + i = \sqrt{2}(\cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})),$$
   $$\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i = \cos(\frac{\pi}{6}) + i\sin(\frac{\pi}{6}).$$

   Daaruit volgt dat

   $$(1+i)^{10} + (\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i)^{30} = 32(\cos(10\frac{\pi}{4}) + i\sin(10\frac{\pi}{4})) + \cos(30\frac{\pi}{6}) + i\sin(30\frac{\pi}{6}).$$

   Door dat een beetje te versimpelen (en veelvouden van 2π uit de cosinus en sinus weg te nemen) komen we op

   $$32(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2})) + \cos(\pi) + i\sin(\pi),$$

   ofwel $32i - 1$. De modulus van dat getal is $\sqrt{32^2 + 1} = \sqrt{1025}$ $(= 5\sqrt{41})$.

3. Deze definitie is:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : |x-2| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x^2+1}{3x-1} - 1 \right| < \epsilon.$$

Onsmakelijk. Laten we eerst het deel rechts eens anders schrijven:

$$\frac{x^2+1}{3x-1} - 1 = \frac{x^2-3x+2}{3x-1} = (x-2)\frac{x-1}{3x-1}.$$

Als we nu die breuk kunnen afschatten voor redelijke waarden van x, zijn we klaar. Het nulpunt van de noemer is op $x = 1/3$, dus als we $\delta \leqslant 1$ houden, gedraagt de breuk zich netjes. Nu houden we dus $1 \leqslant x \leqslant 3$, zodat (vul 1 en 3 in) geldt dat $0 \leqslant \frac{x-1}{3x-1} \leqslant \frac{1}{4}$, en dus

$$|x-2| \left| \frac{x-1}{3x-1} \right| < \frac{1}{4}\delta.$$

We willen dat dat ding kleiner is dan ϵ, dus we kiezen $\delta \leqslant 4\epsilon$. Samen met onze eis dat $\delta \leqslant 1$ hebben we dus $\delta := \min(1, 4\epsilon)$.

Nu nog even het bewijs netjes opschrijven.

Voor alle $\epsilon > 0$ moet een δ bestaan, kies $\delta = \min(1, 4\epsilon)$, nu geldt dus $\delta \leqslant 1$ en $\delta \leqslant 4\epsilon$. Neem aan dat $|x-2| < \delta$, dan volgt dat $1 \leqslant x \leqslant 3$ en dus $\left|\frac{x-1}{3x-1}\right| \leqslant \frac{1}{4}$. Daaruit volgt dan weer dat

$$\left| \frac{x^2+1}{3x-1} - 1 \right| = |x-2| \left| \frac{x-1}{3x-1} \right| < \frac{1}{4}\delta \leqslant \epsilon,$$

dat laatste omdat $\delta \leqslant 4\epsilon$. Hiermee is het bewijs geleverd.

4. Deze limiet is van het type $0 \cdot \infty$, dus we moeten hem een beetje omschrijven en dan kunnen we l'Hopital toepassen. Dat omschrijven kun je zo doen:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{1/\tan(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(x)}{\cos(x)/\sin(x)}.$$

Pas de regel toe, dan krijg je dit:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1/x}{(-\sin^2(x) - \cos^2(x))/\sin^2(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{1/x}{-1/\sin^2(x)}.$$

Nu is het handiger om de breuk even om te draaien. Het bovenstaande is gelijk aan

$$-\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2(x)}{x},$$

en nu gaan we nog een keer l'Hopital doen want dit is $0/0$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{2\sin(x)\cos(x)}{1} = \lim_{x \to 0} \sin(2x) = 0.$$

5. Noem de integrand $g(t)$, dan is $f(x) = G(e^x) - G(2)$, dus $f'(x) = G'(e^x)e^x = g(e^x)e^x$ (kettingregel). Even invullen:

$$f'(x) = \frac{(\ln(e^x))^2}{(e^x)^3} e^x = \frac{x^2}{e^{2x}} \left(= \left(\frac{x}{e^x} \right)^2 \right).$$

6. Locale extrema vind je door differentiëren. Let's go:

$$f'(x) = \frac{(x^2+2)(3x^2) - (x^3+10)(2x)}{(x^2+2)^2} = \frac{x^4 + 6x^2 - 20x}{(x^2+2)^2}.$$

Dit ding is 0 als de teller nul is en de noemer niet, maar $x^2 + 2$ heeft geen nulpunten (reken maar na) dus het kwadraat ervan ook niet.

De teller kun je schrijven als $x(x^3 + 6x - 20)$, dus $x = 0$ is een extremum. Het rechterding is lastiger. Na een beetje gokken kom ik erachter dat $x = 2$ een nulpunt is. We kunnen dus een factor $(x - 2)$ uit $x^3 + 6x - 20$ wegdelen (net zoals we eerder een factor x hadden weggedeeld).

Deel $x^3 + 6x - 20$ door $x - 2$. Eerst de hoogste macht weghalen: x^3. Om die te krijgen, doe $x - 2$ keer x^2, dit is $x^3 - 2x^2$. Trek dit van de teller af, $x^3 + 6x - 20 - x^3 + 2x^2 = 2x^2 + 6x - 20$. Onthoud x^2.

Deel $2x^2 + 6x - 20$ door $x - 2$. Hoogste macht haal ik weg door $x - 2$ keer $2x$ te doen, dat is $2x^2 - 4x$. Trek dat van de teller af, $2x^2 + 6x - 20 - 2x^2 + 4x = 10x - 20$. Je onthield x^2, tel daar $2x$ bij en onthoud dus $x^2 + 2x$.

Deel $10x - 20$ door $x - 2$. Doe $x - 2$ keer 10 om van de hoogste macht af te komen, dat is $10x - 20$. Trek dat van de teller af, er blijft niks over. Je onthield $x^2 + 2x$, nu heb je nog een 10 dus het antwoord is $x^2 + 2x + 10$.

Fijn, dus nu is $x^3 + 6x - 20 = (x - 2)(x^2 + 2x + 10)$. Pas de ABC-formule toe op dat rechterding, hij heeft geen oplossingen, dus de enige oplossingen zijn $x = 0, x = 2$, dit zijn de extrema. Vul ze in in f, en je krijgt de extrema $f(0) = 5$ en $f(2) = 3$, de eerste is een lokaal maximum en de tweede een lokaal minimum (vul ze in in f'' als je dat heel netjes wilt doen, ik vind eigenlijk dat de opmerking dat f continu is, volstaat).

7. Je zou je $\tan^3(x)$ kunnen omschrijven tot

$$\tan^3(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \tan(x) = \frac{1 - \cos^2(x)}{\cos^2(x)} \tan(x) = \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} - \tan(x),$$

en die dan apart gaan primitiveren. De afgeleide van een tangens is $1/\cos^2(x)$, de primitieve ervan kun je uit je hoofd leren, maar het is niet nodig. Beide integralen lossen we op met substitutie.

$$\int \frac{\tan(x)}{\cos^2(x)} dx = \int u \, du = \frac{u^2}{2} = \frac{1}{2} \tan^2(x),$$
$$\int \tan(x) dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)} dx = \int \frac{-1}{u} du = -\log(u) = -\log(\cos x).$$

Het eindantwoord is dus $\int \tan^3(x)dx = \frac{1}{2}\tan^2(x) - \log(\cos x)$.

8. Deze som kan op twee heel verschillende manieren. Ik doe de manier die me iets meer, maar makkelijker rekenwerk oplevert.

   We gaan even kijken naar de noemer, $2x^2 - 7x + 3$. Ik wil dit schrijven als $(2x + a)(x + b)$, als ik dat uitwerk krijg ik $2x^2 + (a + 2b)x + ab$, dus $ab = 3$, zodat je ziet dat $a = -1$ en $b = -3$. Nu wil ik de breuk in de integraal schrijven als twee kleinere breuken:

   $$\frac{10}{(2x-1)(x-3)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

   Als je alles nu keer $(2x - 1)(x - 3)$ doet, zie je dat

   $$10 = A(x-3) + B(2x-1) = x(A+2B) - 3A - B,$$

   ofwel $A + 2B = 0$ en $-3A - B = 10$. De oplossing daarvan is $A = -4$, $B = 2$. Nu is het hele integreerwerk wat makkelijker:

   $$\int \frac{2}{x-3} - \frac{4}{2x-1} dx = 2\log(x-3) - 2\log(2x-1) + c = 2\log\left(\frac{x-3}{2x-1}\right) + c$$

   Tot slot de grenzen. De bovengrens is een limiet,

   $$\lim_{x\to\infty} 2\log\frac{x-3}{2x-1} = 2\lim_{x\to\infty}\log\frac{1-3/x}{2-1/x} = 2\log\frac{1}{2}.$$

   De ondergrens vullen we gewoon in. Het eindantwoord is dan

   $$\int_{5\frac{1}{2}}^{\infty} \frac{10}{2x^2-7x+3} dx = 2\log\frac{1}{2} - 2\log\frac{5/2}{10} = 2\log(2).$$

9. Deze vergelijking is niet scheidbaar, we gebruiken dus de methode met de integratiefactor. Herschrijf de vergelijking in standaardvorm:

   $$y' + 1 \cdot y = 2e^{-x}.$$

   De integratiefactor is hier dus $\exp(\int 1\ dx) = e^x$. Dan krijgen we

   $$\begin{aligned} y'(x)e^x + y(x)e^x &= 2e^{-x}e^x \\ \frac{d}{dx}(y(x)e^x) &= 2 \text{ (productregel differentiëren)} \\ y(x)e^x &= \int 2\ dx = 2x + c \\ y(x) &= (2x + c)e^{-x} \end{aligned}$$

   Tot slot vullen we $y(0) = 2$ in, dan zien we dat $2 = (0 + c)e^0 = c$. De eindoplossing is dus $y(x) = 2(x + 1)e^{-x}$.